BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

УДК: 517.97

О СВОЙСТВАХ СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ В ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М.А.ЯГУБОВ, Р.Б.ЗАМАНОВА
Бакинский Государственный Университет
quseynova-ruhiya@mail.ru

Для процессов, описываемых уравнением третьего порядка, вводятся первоначальная и овыпукленная задачи оптимального управления. Далее, изучается связь между множествами решений соответствующих краевых задач.

Ключевые слова: обычное управление, траектория, допустимая пара, мера Радона, овыпукленная задача

В работе исследуется связь между множествами решений первоначальной и овыпукленной краевых задач оптимального управления в процессах, описываемых уравнением с частными производными третьего порядка.

Постановка задачи. Пусть в области $Q=(0,1)\times(0,T)$ процесс описывается дифференциальным уравнением

$$\beta z_{tt}+z_t-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}F_1(z_x)-\frac{\partial}{\partial x}F(z_x)=f_1(x,t,u) \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$z(0,t)=z(1,t)=0\,, \qquad (2)$$

$$z(x,0)=z_0(x),\ z_t(x,0)=z_1(x)\,, \qquad (3)$$

где $T>0$ - заданное число, β,ε - положительные постоянные, $u(x,t)=(u_1(x,t),...,u_r(x,t))$ измеримая на Q вектор-функция управления, принимающая значения из ограниченного множества $U\subset R^r$. Такие $u(x,t)$ назовем допустимыми «обычными» управлениями, а множество таких управлений обозначим σ_U.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются следующие условия:

а) $F_1(s)\in C^2(R),\ F_1'(s)=\dfrac{dF_1(s)}{ds}\ge\delta>0$;

б) $F(s)\in C^1(R),\ -F'(s)\le c(1+F_1'(s)),\ \ c>0$;

в) $f_1(x,t,u)\in C(\overline{Q}\times\overline{U})$ и при $u,\ u+\Delta u\in U$,

$$\left|f_1(x,t,u+\Delta u)-f_1(x,t,u)\right|\le K\cdot\left|\Delta u\right|,\ \left|\Delta u\right|=\sqrt{\Delta u_1^2+\ldots+\Delta u_r^2}\ ;$$

г) $z_0(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\cap W_2^2(0,1),\ z_t\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$;

д) $\varepsilon>0,\ 0<\beta\le 1$.

Эти условия назовем условием A.

Так как для любого допустимого «обычного» управления $u=u(x,t)$ функция $f_1(x,t,u(x,t))\equiv f(x,t)\in L_2(Q)$ и оператор ***f***, определяемый как ***f*** $u(x,t)=f_1(x,t,u(x,t))$ действует из σ_U в $L_2(Q)$, ограничен, то при выполнении условия A, в силу $[2]$, для каждого $u(x,t)\in\sigma_U$ задача (1)-(3) имеет регулярное решение $z(x,t)$: $z\in L_\infty(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\cap W_2^2(0,1))$, $z_t\in L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)),\ z_{tt}\in L_2(Q),\ \ z_{xxt}\in L_2(Q)$, причём множество всех решений ограничено (см.$[2]$). Эти решения удовлетворяют интегральному тождеству

$$-\beta\int\limits_Q z_t v_t dxdt+\int\limits_Q z_t v dxdt+\varepsilon\int\limits_Q\frac{\partial}{\partial t}F_1(z_x)v_x dxdt+$$
$$+\int\limits_Q F(z_x)v_x dxdt=\int\limits_Q f_1(x,t,u)v dxdt, \qquad (4)$$

где $v(x,t)$ произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $v(x,0)=v(x,T)=0$, $v(0,t)=v(1,t)=0$.

Следуя $[2]$, введем пространство $W(Q)$ функций, образованное замыканием гладких функций $z(x,t)$, удовлетворяющих условиям (2), по норме

$$\|z\|_{W(Q)}^2=\max_{t\in[0,T]}\{|\,z_{xt}\,|^2(t)+|\,z_{xx}\,|^2(t)\}+$$
$$+\|z\|_{W_2^2(Q)}^2+\|z_{xxt}\|_{L_2(Q)}^2,$$

где

$$|\,z\,|^2(t)=\int\limits_0^1 z^2(x,t)dx\,.$$

Регулярное решение задачи (1)-(3) при выполнении условия A, принадлежит $W(Q)$ и имеют место неравенства

$$\|z\|_{W(Q)} \le c_0\left(\|f_1\|^2, \Phi(z_0, z_1)\right),$$

$$\max_{\overline{Q}}|z_x(x,t)| \le M_1,$$

где $\Phi(z_0, z_1)$ - неотрицательная ограниченная функция, зависящая от начальных функций $z_0(x)$, $z_1(x)$.

Решение задачи (1)-(3), соответствующее допустимому «обычному» управлению $u = u(x,t)$, назовем обычной «траекторией», а пару $(z(x,t), u(x,t))$ - допустимой парой.

Множество всех обычных траекторий обозначим G_0.

Требуется найти такую допустимую пару, которая минимизирует функционал

$$I(z,u) = \int_Q \Phi(x,t,z,z_x,z_t,u)dxdt. \qquad (5)$$

Поставленную задачу назовем первоначальной задачей оптимального управления; где $\Phi(x,t,z,v_1,v_2,u)$ - заданная функция. В этой работе предполагается, что она является нормальным интегрантом, т.е. каждое ограниченное по норме множество преобразует в ограниченное множество [2].

Пусть μ_{xt} мера Радона, зависящая от двух параметров x,t,δ_u - мера Дирака, сосредоточенная в точке u.

Известно, $[4]$, что для любой непрерывной на $R^2 \times R^r$ функции $\varphi(x,t,u)$, имеющей компактный носитель при каждом фиксированном x,t и любой $u(\cdot) \in \sigma_U$ функция

$$h(x,t) = \int_{R^r} \varphi(x,t,u)d\delta_{u(x,t)} \equiv \left\langle \varphi(x,t), \delta_{u(x,t)} \right\rangle = \varphi(x,t,u(x,t))$$

измерима по Лебегу. На основе этого будем говорить, что семейство $\mu_{xt}, (x,t) \in R^2$, слабо измеримо, если функция

$$h(x,t) = \int_{R^r} \varphi(x,t,u)d\mu_{xt}$$

измерима по Лебегу.

В качестве обобщенного управления будем брать слабо измеримое и финитное семейство вероятностных мер Радона $\mu_{xt}, (x,t) \in Q$, сосредоточенных на U [5]. Множество обобщенных управлений обозначим через Ω_U.

Будем говорить, что последовательность обобщенных управлений $\{\mu_{xt}^N\}$ слабо сходится к обобщенному управлению μ_{xt} по одномерным сечениям, если для любой непрерывной на $R^2 \times R^r$ функции $\varphi(x,t,u)$, имеющей компактный носитель в $R^2 \times R^r$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \varphi(x,t,u), \mu_{xt}^N - \mu_{xt} \right\rangle dx = 0$$

почти при всех t и

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \varphi(x,t,u), \mu_{xt}^N - \mu_{xt} \right\rangle dt = 0$$

почти при всех x.

Доказанная в [6] многомерная аппроксимационная лемма показывает, что множество σ_U плотно в множестве Ω_U в смысле сходимости по одномерным сечениям.

Пусть μ_{xt} произвольное обобщенное управление.

Определение 1. Задачу определения минимума функционала

$$I(z,\mu) = \int_Q \left\langle \Phi(x,t,z,z_x,z_t,u), \mu_{xt} \right\rangle dxdt \qquad (5')$$

на решениях уравнения

$$\beta z_{tt} + z_t - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} F_1(z_x) - \frac{\partial}{\partial t} F(z_x) = \left\langle f_1(x,t,u), \mu_{xt} \right\rangle, \qquad (1')$$

удовлетворяющих начальным и граничным условиям (2), (3), назовем овыпукленной задачей.

Здесь

$$\left\langle \cdot,\, \mu_{xt} \right\rangle = \int_{R^r} (\cdot) d\mu_{xt}.$$

Отметим, что при выполнении условия A, для каждого обобщенного управления задача (1′), (2), (3) также имеет регулярное решение, принадлежащее $L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1))$ и это решение удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\beta\int_Q z_t v_t dxdt+\int_Q z_t v dxdt+\varepsilon\int_Q \frac{\partial}{\partial t}F_1(z_x)v_x dxdt+$$
$$+\int_Q F(z_x)v_x dxdt=\int_Q \langle f_1(x,t,u),\mu_{xt}\rangle v dxdt, \qquad (4')$$

для любой гладкой функции $v(x,t)$, удовлетворяющей условиям $v(x,0)=v(x,T)=0$, $v(0,t)=v(1,t)=0$.

Множество решений задачи ($1'$), (2), (3) соответствующее множеству обобщенных управлений Ω_U обозначим G.

Определение 2. Каждый элемент множества $G\setminus G_0$ назовем «обобщённой траекторией», а пару $(z,\mu_{xt})\in(G\setminus G_0)\times(\Omega_U\setminus\sigma_U)$, в которой $z(x,t)$ соответствует μ_{xt}, - скользящим режимом.

Прежде чем перейти к установлению связи между множествами G_0 и G, приведем некоторые оценки последовательностей решений задач (1)-(3) и ($1'$), (2), (3), а также некоторые факты.

Пусть $\{u_N(x,t)\}$ и $\{\mu_{xt}^N\}$ последовательности «обычных» и обобщенных управлений, а $\{z^N(x,t)\}$ соответствующая последовательность обычных или обобщенных «траекторий». Повторяя схему получения априорных оценок из $[2]$, получаем, что для регулярных решений (1)-(3) и ($1'$), (2), (3) имеют место неравенства

$$\|z^N\|_{W(Q)}\le c_0,\ \max_{\overline{Q}}|z_x^N|\le M_1,$$
$$\|z_{xt}^N\|_{L_2(Q)}+\|z_{xx}^N\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))}+\|z_t^N\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))}\le c_1.$$

В силу этих неравенств получается, что из последовательности $\{z^N(x,t)\}$ можно выбрать подпоследовательность, которую мы вновь обозначаем через $\{z^N(x,t)\}$, для которой имеют место сходимости:

$z_x^N(x,t)\to z^0(x,t)$ равномерно в $C(\overline{Q})$,
$z_t^N(x,t)\to z^0(x,t)$ * - слабо в $L_\infty(0,T;L_2(0,1))$,
$z_t^N(x,t)\to z^0(x,t)$ слабо в $L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))$,
$z_{xx}^N(x,t)\to z_{xx}^0(x,t)$ * - слабо в $L_\infty(0,T;L_2(0,1))$,
$z^N(x,t)\to z^0(x,t)$ слабо в $W(Q)$.

Теорема 1. Пусть выполняется условие A. Тогда множество G слабо замкнуто в смысле слабой сходимости «обобщенных траекторий» в $W(Q)$ и слабой сходимости по одномерным сечениям соответствующей последовательности обобщенных управлений.

Доказательство. Пусть $\{\mu_{xt}^N\}$ последовательность обобщенных управлений, а $\{z^N(x,t)\}$ соответствующая последовательность «обобщённых траекторий», слабо сходящая к $z(x,t)$ в $W(Q)$. Так как Ω_U слабо компактно, то из $\{\mu_{xt}^N\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим $\{\mu_{xt}^N\}$, а предел обозначим μ_{xt}^0.

Переходя к пределу в тождестве

$$-\beta\int_Q z_t^N \cdot v_t dxdt + \int_Q z_t^N \cdot vdxdt + \varepsilon\int_Q \frac{\partial}{\partial t} F_1(z_x^N)\cdot v_x dxdt +$$

$$+\int_Q F(z_x^N)\cdot v_x dxdt \int_Q \left\langle f_1(x,t,u), \mu_{xt}^0\right\rangle \cdot vdxdt -$$
$$-\int_Q \left\langle f_1(x,t,u), \mu_{xt}^N - \mu_{xt}^0\right\rangle \cdot vdxdt = 0,$$

получим тождество

$$-\beta\int_Q z_t^0 \cdot v_t dxdt + \int_Q z_t^0 \cdot vdxdt + \varepsilon\int_Q \frac{\partial}{\partial t} F_1(z_x^0)\cdot v_x dxdt +$$
$$+\int_Q F(z_x^0)\cdot v_x dxdt - \int_Q \left\langle f_1(x,t,u), \mu_{xt}^0\right\rangle \cdot vdxdt = 0,$$

которое показывает, что $z^0(x,t)$ является решением овыпукленной задачи ($1'$), (2), (3) из $W(Q)$, соответствующем μ_{xt}^0, т.е. $z^0(x,t)\in G$. Следовательно, G слабо замкнуто в приведенном в теореме смысле. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполняется условие A и каждому обобщенному управлению соответствует единственное решение задачи ($1'$),(2),(3). Тогда слабое замыкание множества G_0 в пространстве $W(Q)$ совпадает с G.

Доказательство. В силу слабой замкнутости G ясно, что слабое замыкание G_0 принадлежит G, т.е. $\overline{G_0}\subset G$. Докажем справедливость обратного включения.

Пусть $(z^0(x,t),\mu_{xt}^0)$ - некоторый скользящий режим. В силу многомерной аппроксимационной леммы существует последовательность обычных допустимых управлений $\{u_N(x,t)\}$ такая, что соответствующая последовательность мер Дирака $\{\delta_{u_N}(x,t)\}$ слабо сходится по одномерным сечениям к $\mu_{xt}^0, (x,t) \in Q$. Обозначим через $\{z^N(x,t)\}$ последовательность решений (1)-(3), соответствующий последовательности $\{u_N(x,t)\}$. Таким образом, имеет место тождество:

$$\beta z_{tt}^N + z_t^N - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} F_1(z_x^N) - \frac{\partial}{\partial x} F(z_x^N) = f_1(x,t,u_N(x,t)),$$

или в силу свойства функции Дирака,

$$\beta z_{tt}^N + z_t^N - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} F_1(z_x^N) - \frac{\partial}{\partial x} F(z_x^N) = \left\langle f_1(x,t,u), \delta_{u_N(x,t)}) \right\rangle.$$

Кроме того, т.к. $(z^0(x,t), \mu_{xt}^0)$ некоторый скользящий режим, то имеет место тождество

$$\beta z_{tt}^0 + z_t^0 - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} F_1(z_x^0) - \frac{\partial}{\partial x} F(z_x^0) = \left\langle f_1(x,t,u), \mu_{xt}^0 \right\rangle.$$

в смысле определения обобщенного решения.

Из этих тождеств имеем

$$\beta\left(z_{tt}^0 - z_{tt}^N\right) + \left(z_t^0 - z_t^N\right) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left[F_1(z_x^0) - F_1(z_x^N)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[F(z_x^0) - F(z_x^N)\right] = \\ = \left\langle f_1(x,t,u), \mu_{xt}^0 - \delta_{u_N(x,t)} \right\rangle.$$

Это значит, что $y = z^0(x,t) - z^N(x,t)$ является решением задачи

$$\beta y_{tt} + y_t - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} F_1(y) - \frac{\partial}{\partial x} F(y) = \left\langle f_1(x,t,u), \mu_{xt}^0 - \delta_{u_N(x,t)} \right\rangle,$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0,$$

$$y(x,0) = 0,$$

$$y_t(x,0) = 0.$$

Отсюда, на основе многомерной аппроксимационной леммы [6], приведенных выше свойств сходимости, получаем, что $\{z^N(x,t)\}$ слабо сходится в $W(Q)$ к $z^0(x,t)$. Это показывает, что $z(x,t) \in \overline{G}_0$ и, следовательно, $G \subset \overline{G}_0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956, 392 с.
2. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1983, 269 с.
3. Гусейнова Р.Б. О существовании оптимального управления в одной задаче управления для уравнения, описывающего некоторые задачи газовой динамики // «Научные труды. Фундаментальные науки» Азербайджанского Технического Университета, Баку, 2006, №1, т.V(17), с.106-109.

4. Гамкрелидзе Р.В. Скользящие режимы в теории оптимального управления // Труды математического института АН СССР, 1985, т.169, с. 180-193.
5. Ягубов М.А., Асадова Н.Ш. О связи между множествами решений основной и расширенной задач для задачи управления в эллиптических уравнениях // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», 2010, №4, с.43-52.
6. Багиров А.М. Многомерная аппроксимационная лемма и некоторые ее применения. Баку, 1980, 46 с., Деп. в ВИНИТИ, №3431-80.
7. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004, 504 с.

ÜÇ TƏRTİBLİ QEYRİ-XƏTTİ TƏNLİKLƏ TƏSVİR OLUNAN PROSESLƏRDƏ SÜRÜŞKƏN REJİMLƏRİN XASSƏLƏRİ HAQQINDA

M.H.YAQUBOV, R.B.ZAMANOVA

XÜLASƏ

Üç tərtibli xüsusi törəməli tənliklə təsvir olunan proseslər üçün ilkin optimal idarə məsələsi və uyğun qabarıqlaşdırılmış məsələ daxil edilir. Sonra uyğun sərhəd məsələlərinin həlləri çoxluqları arasında əlaqə öyrənilir.

Açar sözlər: adi idarə, trayektoriya, mümkün cüt, Radon ölçüsü, qabarıqlaşdırılmış məsələ.

ON PROPERTIES OF SLIPPERY REGIMES IN PROCESSES DESCRIBED BY THE THIRD ORDER NONLINEAR EQUATION

M.A.YAGUBOV, R.B.ZAMANOVA

SUMMARY

The initial (elementary) and convexed problems of optimal control for the processes described by third order nonlinear equation are introduced. Further, the relation between the sets of the solutions of corresponding problems is studied.

Key words: ordinary control, trajectory, admissible pair, Radon measure, convexity problem.

Поступила в редакцию: 02.05.2011 г.
Принято к печати: 03.10.2011 г.